

Múltiples i divisors

3. Mínim comú múltiple i màxim comú divisor

Mínim comú múltiple

El mínim comú múltiple de diversos nombres, a, b, c, etc., és el nombre més petit que és múltiple de tots aquests nombres, sense considerar el 0.

Se escriu mcm (a, b, c, ...)

- EXEMPLE: mcm de 12 i 30

Múltiples de 12 → 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 96, 108, 120, ...

Múltiples de 30 → 30, **60**, 90, 120, 150, 180, 210, ...

Hi ha molts més nombres que són a la vegada múltiples de 12 i de 30, però el menor de tots és 60.

$$\text{mcm}(12,30) = \mathbf{60}$$

Màxim comú divisor

El màxim comú divisor de diversos nombres a, b, c, etc., és el nombre més gran que és divisor de tots aquests nombres.

Se escriu mcd (a, b, c, ...)

- EXEMPLE: mcd de 12 i 30

Divisors de 12 → 1, 2, 3, 4, **6**, 12

Divisors de 30 → 1, 2, 3, 5, **6**, 10, 15, 30

1, 2, 3 i 6 són divisors de 12 i de 30, el major és el 6.

$$\text{mcd}(12,30) = \mathbf{6}$$

Calcular el mcm i el mcd

Comencem descomponent els nombres en factors primers:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{mcm}(12,30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$\text{mcd}(12,30) = 2 \cdot 3 = 6$$

- El **mínim comú múltiple** de diversos nombres és el producte dels factors **comuns i no comuns** elevats al seu **major** exponent.
- El **màxim comú divisor** de diversos nombres és el producte dels **factors comuns** elevats a l'exponent **menor**.

Quan resulta que l'únic divisor comú entre dos nombres és l'1, diem que són primers entre sí. Per exemple el 72 i el 55, el 8 i el 9, el 15 i el 16.

EXERCICIS resoltos

9. Troba el mcd de 64 i 100

La seva descomposició en factors: $64 = 2^6$
 $100 = 2^2 \cdot 5^2$

Solució: $\text{mcd}(64, 100) = 2^2 = 4$

10. Calcula el mcd i el mcm de 15 i 18, després multiplica'ls. Efectua també el producte 15·18, què hi observes?

Solució: $\text{mcd}(15, 18) = 3$
 $\text{mcm}(15, 18) = 90$
El seu producte = $18 \cdot 15 = 270$
El producte del seu mcd pel seu mcm = $3 \cdot 90 = 270$

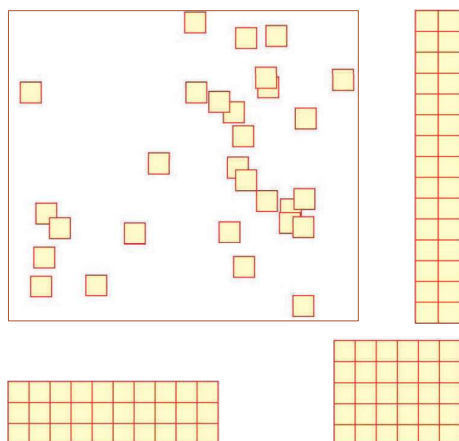
11. Els nombres 8 i 21 no tenen divisors comuns, són primers entre sí. Quin és el seu mcm?

Solució: Si no tenen factors comuns, el seu mcd és 1.
El seu mcm és el seu producte = $8 \cdot 21 = 168$

12. Troba dos nombres primers entre sí el producte dels quals sigui 72.

Solució: Si no tenen factors comuns, el seu mcd és 1.
El seu mcm és el seu producte = $8 \cdot 9 = 72$

4. Aplicacions



Problemes d'aplicació

1) Tinc una col·lecció de 30 minerals, guardats cadascun en una caixa quadrada, totes les caixes són iguals. Vull posar aquestes caixes en exposició de manera que formin un rectangle complet. De quantes maneres ho puc fer? Quina és la disposició que més s'assembla a un quadrat?

✓ Els divisors de 30 són 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 i 30

Puc posar les caixes en rectangles de les següents maneres:

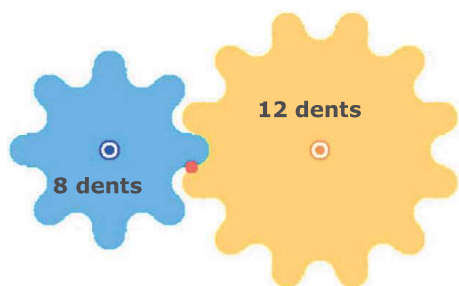
1x30 ó 30x1

2x15 ó 15x2

3x10 ó 10x3

5x6 ó 6x5

Qualsevol d'aquestes dues disposicions és la més "quadrada"



2) Aquestes rodes dentades formen un engranatge. Calcula quantes dents de cada roda han de passar fins que els punts assenyalats en color vermell tornin a coincidir. Quantes voltes haurà donat cadascuna de les rodes?

✓ La roda blava té 8 dents, la groga 12.

El número de dents que han de passar fins que tornin a coincidir és un múltiple de 8 i de 12, a més el menor dels múltiples comuns.

$$8=2^3 \quad 12=2^2 \cdot 3 \quad \text{mcm}(8,12)=2^3 \cdot 3=24$$

Quan hagin passat 24 dents, els punts vermells tornaran a coincidir.

La roda blava haurà girat $24:8 = 3$ voltes.

La roda groga haurà donat $24:12 = 2$ voltes.



3) Tinc peces de colors per fer collarets, n'hi ha 120 de blaves, 160 de vermelles i 200 de blanques. Vull fer collarets tan llargs com sigui possible, cada collaret amb el mateix nombre de peces sense que en sobrin i sense barrejar colors. Quantes peces he d'utilitzar per a cada collaret? Quants collarets de cada color puc fer?

✓ Si no poden sobrar peces de cap dels tres colors, el número de peces que hauré de posar és un divisor de 120, 160 i 200. Com que també els vull fer tan llargs com sigui possible serà el mcd.

$$120=2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad 160=2^5 \cdot 5 \quad 200=2^3 \cdot 5^2$$

$$\text{mcd}(120,160,200)=2^3 \cdot 5=40$$

40 peces utilitzaré a cada collaret

Puc fer $120:40=3$ collarets blaus,

$160:40=4$ collarets vermells,

$200:40=5$ collarets blancs.